ベクトルと行列の基礎

渡辺大地

1　ベクトルの意義

コンピュータグラフィックスを学ぶものにとって、**ベクトル** は極めて重要な概念である。なぜならば、ベクトルは平面や空間が持つ諸性質を最もシンプルに表したものであり、どんなに高度な理論であっても最終的にはこのベクトルの性質を組み合わせたものに帰結することができるからである。しかしこのシンプルな点が、逆に実世界とどのように結び付いた理論なのかがわかりづらいという問題を生み、学習者の理解を妨げている一因となっていることがある。そこで、本書ではベクトルの諸性質がどのような意味を持つのかをできるだけ実例を盛り込みながら解説を行う。

2　ベクトルの定義と記述

ベクトルは、通常 n 個の実数の組として定義する。n は主として 2, 3, 4 のいずれかである。n 次元のベクトル $\mathbf{V}$ は次のように書くことができる。

$$\mathbf{V} = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$$

ここで、数値 V_n をベクトルの **成分** という。上の定義式は添字が数字であるが、通常は対応する軸の名前で成分をラベル付けする。たとえば、3 次元の点 $\mathbf{P}$ の成分は P_x, P_y, P_z と書かれる。

ベクトルの表記方法は大きく二通りある。一方は、横矢印をベクトルを表す文字の上に配置する方法で、$\overrightarrow{\mathrm{A}}, \overrightarrow{\mathrm{B}}$ と表記する方法である。もう一方には、太字を利用した $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ という表記方法もある。高校数学においては、ベクトルの表記方法は前者に統一されているが、一般的な書籍では後者を用いることが圧倒的に多い。しかし、両者に本質的な違いはないので、それぞれの読み替えは非常に容易である。

ベクトルは、しばしば n 行 1 列の行列として表されることもある。

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

このように表記されたベクトルを **列ベクトル** と呼ぶ。一方、最初に紹介したように横に成分を並べたベクトルを **行ベクトル** と呼ぶ。行ベクトルと列ベクトルは、初学者にとっては <u>本質的に違いはない</u> と考えて差し支えない。ただし、後々に出てくる行列との演算では双方に制約が出るため、行ベクトルを列ベクトルへ、あるいはその逆の変換を行うことがある。これを **転置** と呼び、**転置記号** 「$\top$」を用いて以下のように表される。

ベクトルの転置:

行ベクトルと列ベクトルの変換は、転置記号を用いて以下のように表す。

$$(V_1, V_2, \ldots, V_n)^\top = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}^\top = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$$

そして、普通単に「ベクトル」というとき、それは 大抵 列ベクトルを表すことを覚えておくとよい。

さて、上に述べたものは表記上のベクトルの定義であり、端的な定義「ベクトルは実数の組である」という点を述べたが、ベクトルにはもう一つ意味が存在する。それは以下のものである。

ベクトルの図形的な定義:

ベクトルとは、**有向線分** (向きのついた線分) で、その位置を問題にしないで、大きさと方向を考えたものである。

例えば、xy 平面上で x 方向に 1、y 方向に 2 進むようなベクトルを $\mathbf{V} = (1, 2)$ と表す。

A を始点、B を終点とする有向線分 AB で表されるベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く。

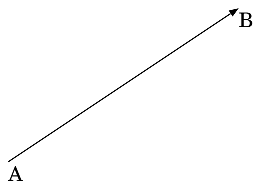

図 1: ベクトル AB

このとき、点 A、B の座標がそれぞれ $(A_x, A_y, A_z), (B_x, B_y, B_z)$ のとき、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z)$$

となる。

3 ベクトルの演算

3.1 ベクトルのスカラー積

スカラーとは、ベクトルと対比した用語で、要するに単一の実数のことである。従って、「スカラー積」とは実数倍のことに他ならない。ベクトルとスカラーは掛け合わせることができる。ベクトル $\mathbf{V}$ とスカラー k の積を以下のように定義する。

$$k\mathbf{V} = \mathbf{V}k = (kV_1, kV_2, \ldots, kV_n)$$

これの図形的な意味は、もし k が正ならば、ベクトルの方向をまったく変更せずに長さを k 倍にしたのと同義である。k が負の場合は、ベクトルの向きは逆となり、大きさは $|k|$ 倍となる。特に、$k = -1$ のときを $-\mathbf{V}$ と書く。

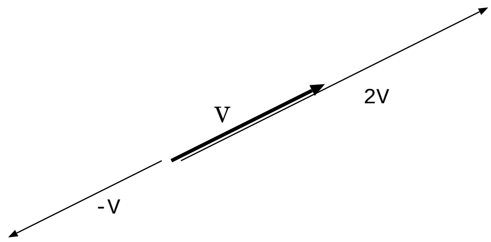

図 2: ベクトルのスカラー積

4 ベクトルの和・差

二つのベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ の和 $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{P}+\mathbf{Q}=(P_1+Q_1,\ P_2+Q_2,\ \ldots\ ,P_n+Q_n)$$

これの図形的意味は、以下の図 3 のようなベクトルの継ぎ足しである。

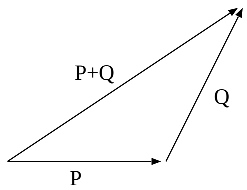

図 3: ベクトルの和

ベクトルの差 $\mathbf{P}-\mathbf{Q}$ は、$\mathbf{P}+(-\mathbf{Q})$ と考えることができる。ここで重要なのは、点 P の位置を表すベクトル (このようなベクトルを**位置ベクトル**と呼ぶ) $\mathbf{P}$ と、点 Q の位置を表すベクトル $\mathbf{Q}$ から、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をベクトルの差 $\mathbf{Q}-\mathbf{P}$ から求められるという事実である。図 4 はその様子を表す。

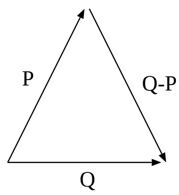

図 4: ベクトルの差

4.1 ベクトルの演算法則

ベクトルのスカラー積および和・差の演算の法則から、以下の法則を導くことができる。以下のうち、a, b は実数を、$\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ は任意のベクトルを表す。

$$\begin{cases} \mathbf{P}+\mathbf{Q}=\mathbf{Q}+\mathbf{P} \\ (\mathbf{P}+\mathbf{Q})+\mathbf{R}=\mathbf{P}+(\mathbf{Q}+\mathbf{R}) \\ (ab)\mathbf{P}=a(b\mathbf{P}) \\ a(\mathbf{P}+\mathbf{Q})=a\mathbf{P}+a\mathbf{Q} \\ (a+b)\mathbf{P}=a\mathbf{P}+b\mathbf{P} \end{cases}$$

要するに、ベクトルは 数を表す文字と同じように計算してもよい ということである。

5 ベクトルの大きさ

n 次元ベクトル $\mathbf{V}$ の **大きさ** を $|\mathbf{V}|$ または $||\mathbf{V}||$ と表し、以下の公式で定義する。

$$|\mathbf{V}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{V_i}^2}$$

三次元空間の場合は、$|\mathbf{V}|=\sqrt{{V_x}^2+{V_y}^2+{V_z}^2}$ となる。ベクトルの大きさは、**ノルム** または **長さ** と呼ばれることもある。図形的な意味としては、文字通り長さを表す。

大きさがちょうど 1 のベクトルのことを **単位長** のベクトル、あるいは単に **単位ベクトル** という。ベクトル $\mathbf{V}$ の成分の少なくとも 1 つが 0 でないならば、$\mathbf{V}'=\dfrac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}$ は $\mathbf{V}$ と同じ方向で大きさが 1 のベクトルということになる。このような計算を **正規化** と呼ぶ。数学や 3D コンピュータグラフィックスの多くの公式は、正規化されたベクトルを用いることが多いので、正規化演算は頻繁に利用される。

6 ベクトルの内積

6.1 内積の定義と意義

二つのベクトルの**内積** (**スカラー積** とも呼ばれる) は、3D グラフィックスで頻繁に用いられる演算の一つである。なぜならば、内積は二つのベクトルの角度を示す指標になるものだからである。

まず、内積の定義を示す。

ベクトルの内積の定義:

ベクトル $\mathbf{P}$、$\mathbf{Q}$ の内積は $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}$ と表記し、以下のような公式で与えられる。

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=\sum_{i=1}^{n}P_iQ_i$$

三次元であれば $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z$ ということになる。内積はこのような非常に簡単な計算式で算出できるので、非常に高速に求めることができる。これが内積の有用な点の一点目である。

そして、次に述べる定理が内積が大変有用である二点目となる。

内積の余弦定理:

二つの n 次元ベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ について、内積 $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}$ は次式を満たす。

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = |\mathbf{P}||\mathbf{Q}|\cos\alpha$$

ここで α は、ベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ がなす角である。

この定理から、いくつかの重要な事実が導かれる。第一に、二つのベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ が互いに垂直であるとき、$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = 0$ であり、逆もまた真であることである。第二の事実は、「内積の符合により、二つのベクトルが互いに同じ向きを持っているか逆向きかがわかる」ということである。図 **??** は、ベクトル $\mathbf{P}$ に対し様々なベクトル $\mathbf{Q}$ があるが、図中の点線によって区切られる領域によって内積の符合が変わる。この方法によって、二つのベクトルがほぼ同じ向きなのか、それともやや逆方向に向いているのかを知ることができる。もちろん、$\cos\alpha$ を求めて正確な角度を求めることもできる。ただし、$\mathbf{P}$ からみて $\mathbf{Q}$ が 左右のどちらにあるか を判定するには、後に述べる外積に頼る必要がある。

6.2 内積の演算法則

内積は、以下に述べるような法則を持っている。以下のうち、a は実数を、$\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ は任意のベクトルを表す。

$$\begin{cases} \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{P} \\ (a\mathbf{P})\cdot\mathbf{Q} = a(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}) \\ \mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}+\mathbf{R}) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{P}\cdot\mathbf{R} \\ \mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = |\mathbf{P}|^2 \\ |\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}| \leqq |\mathbf{P}||\mathbf{Q}| \end{cases}$$

一つだけ注意を喚起したいのが、これらの法則の中には外積の法則と一致しないものがある ということである。これについては外積の章でも触れる。

7 ベクトルの外積

7.1 外積の定義と意義

二つの三次元ベクトルの **外積** (**ベクトル積** とも呼ばれる) は、掛け合わされる二つのベクトルに垂直なベクトルを返す。この性質は、それ自体が 3D グラフィックスの中で多くの用途があるが、様々な公式 (例えば平面と点の距離を求める公式など) にも必要となるため、必ず知っていなければならない演算の一つである。外積自体の定義は以下のようなものである。

ベクトルの外積の定義:

二つの三次元ベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ の外積は、次の公式で与えられるベクトル量であり、$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ と表す。

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q} = (P_yQ_z - P_zQ_y,\ P_zQ_x - P_xQ_z,\ P_xQ_y - P_yQ_x)$$

また、外積記号はしばしば $\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$ というものも用いられる。
　内積と同様、外積も三角比的な意味を持っている。

外積の正弦定理: 二つの三次元ベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ について、外積 $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ は次式を満たす。

$$|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}| = |\mathbf{P}||\mathbf{Q}| \sin\alpha$$

ここで α は、ベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ のなす角である。

外積の定義およびこの定理から、いくつかの事実を内積と同様に導くことができる。まず、二つの平行なベクトルの外積の成分はすべて 0 になるということである。このようなベクトルを **零ベクトル** と呼ぶ。また、内積と外積の両方を利用することによって、二つのベクトルのなす角を求めることが可能という点も重要である。

7.2　外積の演算法則

　外積は、以下に述べるような法則を持っている。以下のうち、a は実数を、$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ は任意のベクトルを表す。

$$\begin{cases} \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = -(\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) \\ (a\mathbf{P}) \times \mathbf{Q} = a(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \\ \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \times \mathbf{P} = 0 = (0, 0, 0) \end{cases}$$

特に注意しなければならないのは最初の法則である。外積の場合は、内積と異なり演算の順序が変わると結果が異なる[1]。

8　行列の性質

8.1　行列の定義

　実数や関数などを行列上に並べ、次節以降に述べるような法則を持たせたものを**行列**という。行列は、大きく分けて二つの有用性がある。第一には、連立方程式を解くための理論としてである。3D グラフィックスでは、交線計算や交差判定などで連立方程式を解く機会が頻繁にあるので、方程式の行列化と解の求め方のスキルは必須である。幸にも、それは非常に簡単なものである。第二の行列の有用性は変換機能である。行列は、平行移動や回転移動、あるいは三次元から二次元画像への投影変換を非常に合理的に表現することができる。さらに、それらを組み合わせた複雑な変換を単純にしてしまうことも可能である。そのため、3D グラフィックスの中では非常に重要な理論基盤となる。
　行数と列数が同一の行列を **正方行列** という。本書では、3D グラフィックスで頻繁に用いられる 4 行 4 列の正方行列を主に扱う。

[1] このように、演算の順序が変わると結果が異なるような演算を **非可換** という。一方、和演算や内積のように順序が入れ替わっても結果が同一である演算を **可換** という。

8.2　行列の性質

以下に、行列の諸演算の定義を述べる。

行列の和・差演算:
行列の和・差演算は、各項目の和・差をとることで定義される。

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} \pm b_{00} & a_{01} \pm b_{01} & a_{02} \pm b_{02} & a_{03} \pm b_{03} \\ a_{10} \pm b_{10} & a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{20} \pm b_{20} & a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{30} \pm b_{30} & a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$$

行列の積演算: 行列同士の積は、以下のような式で定義される。

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad \text{のとき、}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{3} a_{ik} b_{kj}$$

行列のスカラー積: 行列と実数の積は、以下のような式で定義される。

$$t \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} a_{00}t & a_{01}t & a_{02}t & a_{03}t \\ a_{10}t & a_{11}t & a_{12}t & a_{13}t \\ a_{20}t & a_{21}t & a_{22}t & a_{23}t \\ a_{30}t & a_{31}t & a_{32}t & a_{33}t \end{pmatrix}$$

行列と列ベクトルの積 行列はと列ベクトルとの積演算を、以下のように定義する。

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{としたとき、} \quad \mathbf{AV} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{3} v_i a_{0i} \\ \sum_{i=0}^{3} v_i a_{1i} \\ \sum_{i=0}^{3} v_i a_{2i} \\ \sum_{i=0}^{3} v_i a_{3i} \end{pmatrix}$$

単位行列:

- 次のような行列を**単位行列**という。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{E}$ や $\mathbf{I}$ で表されることが多い。
- 任意のベクトル $\mathbf{V}$ で $\mathbf{V} = \mathbf{EV}$ が成り立つ。
- 任意の行列 $\mathbf{A}$ で $\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$ が成り立つ。

逆行列:

- 行列 $\mathbf{A}$ に対し、$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ が成り立つとき、$\mathbf{B}$ を $\mathbf{A}$ の**逆行列** といい、$\mathbf{A}^{-1}$ と表す。
- どのような行列であっても、逆行列の個数は 0 か 1 のいずれかである。逆行列が存在する行列を**正則行列**または**可逆行列**という。行列が正則かどうかによって、大きく性質が異なる。
- 逆行列の算出方法は一般的にかなり複雑であり、様々な技法が存在する。

行列の交換則、結合則、分配則:

- 行列の和・差演算に関しては、交換則、結合則いずれも成り立つ。

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

- 行列の積演算に関しては、結合則は成り立つが交換則は成り立たない。

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}), \quad \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

- 次のような分配則が成り立つ。

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

問題 1

$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ を正則な行列とし、$\mathbf{P}$、$\mathbf{Q}$ をベクトルとする。

(1) $\mathbf{Q} = \mathbf{AP}$ が成り立つとき、$\mathbf{P}$ を $\mathbf{A}$ と $\mathbf{Q}$ を用いて表せ。

(2) $\mathbf{Q} = \mathbf{ABCP}$ が成り立つとき、$\mathbf{P}$ を $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ と $\mathbf{Q}$ を用いて表せ。