

2006年度 卒業論文

# 折り紙シミュレーションにおける曲面表現

指導教員：渡辺 大地講師

メディア学部 ゲームサイエンスプロジェクト

学籍番号 M0103284

立川 正人

2006年度 卒業論文概要

論文題目

折り紙シミュレーションにおける曲面表現

メディア学部

学籍番号：M0103284

氏名

立川 正人

指導  
教員

渡辺 大地講師

キーワード

折り紙、メッシュ分割、バブル・メッシュ、クロスシミュレーション、  
Delaunay 法

折り紙は日本に古くから伝わる文化である。現在では“ORIGAMI”の表記で世界各国で親しまれている国際的な遊びとなっている。実際の紙を使って折るだけでなく、折り紙をコンピュータ上で行う折り紙シミュレーションというものも存在し、様々な研究が行われている。

しかし、現在行われている研究では、折り紙を構成する各面が常に平面であることを前提としており、紙に力が加わることで面が湾曲して、曲面となっている状態を表現することができない。このため、形状の表現に曲面を用いている作品をシミュレートすることができないという問題が存在する。

そこで本研究では、折り紙シミュレーションにおいて曲面の表現を行う手法を提案する。折り紙をポリゴンメッシュとしてモデル化し、メッシュの各頂点ごとに掛かる力を求めてその力の釣り合いから折り紙全体の形状を求めることで折り紙の変形をシミュレートする。

# 目次

第1章	はじめに	1
1.1	研究背景と目的	1
1.2	論文構成	3
第2章	面のメッシュ分割	4
2.1	三角形メッシュによる折り紙のモデル化	4
2.2	バブル・メッシュによる面の分割	7
2.2.1	バブル・メッシュの手順	7
2.2.2	バブルの配置	7
2.2.3	Delaunay 法による三角形分割	10
第3章	折り紙モデルの変形	12
3.1	変形の手法	12
3.2	伸縮に対して発生する力	13
3.3	剪断に対して発生する力	14
3.4	曲げに対して発生する力	16
第4章	検証と考察	18
4.1	検証	18
4.1.1	折り目のついていない状態の紙の変形	18
4.1.2	折り目のついている状態の紙の変形	20
4.1.3	折り重なっている状態の紙の変形	22
4.2	考察	24
第5章	まとめ	25
	謝辞	26
	参考文献	27

# 目 次

1.1	曲面の表現が必要な作品の例 (折り鶴)	2
2.1	三角形メッシュによりモデル化した折り紙の例	4
2.2	折り目により新たにメッシュを分割している例	5
2.3	折り目の部分の拡大図	6
2.4	面の形状に合わせたメッシュ分割の例	6
2.5	バブル・メッシュの手順	8
2.6	バブル間力	9
2.7	面内部のバブルの初期配置	10
2.8	外接円の中に他の点を含まない三角形による分割	11
2.9	外接円の中に他の点を含む三角形による分割	11
3.1	紙の力学的特性を表現するために考慮する変形	13
3.2	伸縮に対して発生する力	14
3.3	剪断に対して発生する力	15
3.4	曲げに対して発生する力	17
4.1	プログラムで折り目のついていない紙を曲げる様子	19
4.2	折り目のついていない実際の紙を曲げる様子	20
4.3	プログラムで折り目のついている紙を曲げる様子	21
4.4	折り目のついている実際の紙を曲げる様子	22
4.5	プログラムで折り重なっている状態の紙を曲げる様子	23

# 第 1 章

## はじめに

### 1.1 研究背景と目的

折り紙は日本に古くから伝わる文化である [1]。現在では、“ORIGAMI” の表記で世界各国において親しまれている国際的な遊びとなっている [2]。その折り紙をコンピュータ上で行う折り紙シミュレーションに関する研究 [3][4][5][6] が行われてきている。

Miyazaki らの研究 [3] では、コンピュータ上で折り紙を対話的に操作する手法と、折り紙の形状を記述するためのデータ構造及び形状が変化の際のデータ更新の手法を提案している。また、この研究の手法を用いた折り紙シミュレーションのプログラムが Web 上 [7] に公開されており、折った手順を記録して任意に再生する機能が実装されている。しかし、この研究で用いられている手法では同時に移動できる面は同一平面上にあるものに限られるため、同一平面上にない面を含めて大域的に形状が変化する場合に適応できないという問題点がある。

古田らの研究 [4] では、一つの面を動かしたときにその面と繋がる複数の面を、同一平面上にない面も含めて同時に動かす仕組みをバネモデルを用いて実現し、上記の問題点を解決した。折り紙を構成する各面を剛体とみなして同じ面内の頂点間の距離が一定という制約条件をつけ、面を構成する全ての頂点間に網羅的にバネが張られたモデルを用意し、そのバネによる力の釣り合いから折り紙全体の形状を求めている。

この他にも、横山らによる紙の厚みが原因で生じる「ずれ」を表現するための研究 [5] や、三谷らによる紙が複数枚重なっている部位の構造把握を容易にするための研究 [6] などが行われているが、いずれの研究でも折り紙を構成する各面を平面として扱っている。

しかし、数ある折り紙作品の中には湾曲した状態の面を表現できないと折ることのできない作品も存在する。図 1.1 は曲面の表現が必要な作品の例として挙げた折り鶴である。既存の折り紙シミュレーションでは、折り鶴の胴体の膨らみのような曲面を表現することができない。

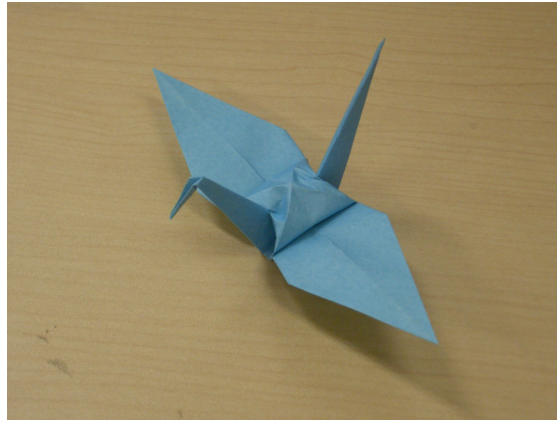


図 1.1: 曲面の表現が必要な作品の例 (折り鶴)

そこで、本研究では折り紙シミュレーションにおいて曲面の表現を行う手法を提案する。曲面を表現するにあたって、本研究ではクロスシミュレーションの手法を参考にする。クロスシミュレーションとは衣服などの布を CG で表現するための技術であり、多くの研究 [8][9][10][11] が行われている。これらの研究では布をポリゴンメッシュとしてモデル化する手法が主流である。本研究でもそれに倣って折り紙をポリゴンメッシュとしてモデル化し、メッシュの各頂点ごとに掛かる力を求めてその力の釣り合いから折り紙全体の形状を求めることで、折り紙の変形をシミュレートする。

## 1.2 論文構成

本論文は全 5 章で構成する。第 2 章で折り紙のメッシュモデル化の手法について述べ、第 3 章で折り紙モデルの変形手法について述べる。第 4 章では本論文の手法を実装した結果の検証と考察を行い、第 5 章で研究のまとめを述べる。

## 第 2 章

# 面のメッシュ分割

### 2.1 三角形メッシュによる折り紙のモデル化

曲面の表現を行い、かつ紙に近い性質のものを扱う技術にクロスシミュレーションがある。クロスシミュレーションとは、特に衣服などの布を CG で再現するための物理シミュレーション技術である。クロスシミュレーションでは布をポリゴンメッシュで近似し、モデル化する手法が主流である [8][9][10][11]。本研究でもそれに倣い、折り紙を小さな三角形に分割したポリゴンメッシュとしてモデル化する。図 2.1 は折り紙を三角形メッシュでモデル化した例である。

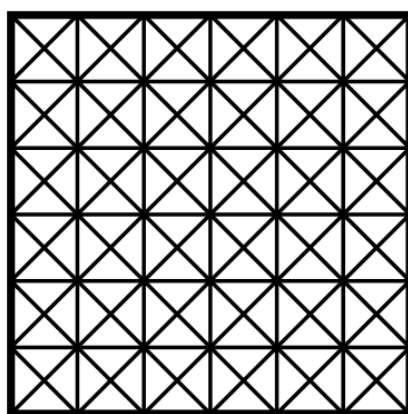


図 2.1: 三角形メッシュによりモデル化した折り紙の例



折り紙のシミュレーションの際、紙を折る操作を行った場合、その折り目によって新たにメッシュを分割する必要がある。図 2.2 はその様子を示した例である。

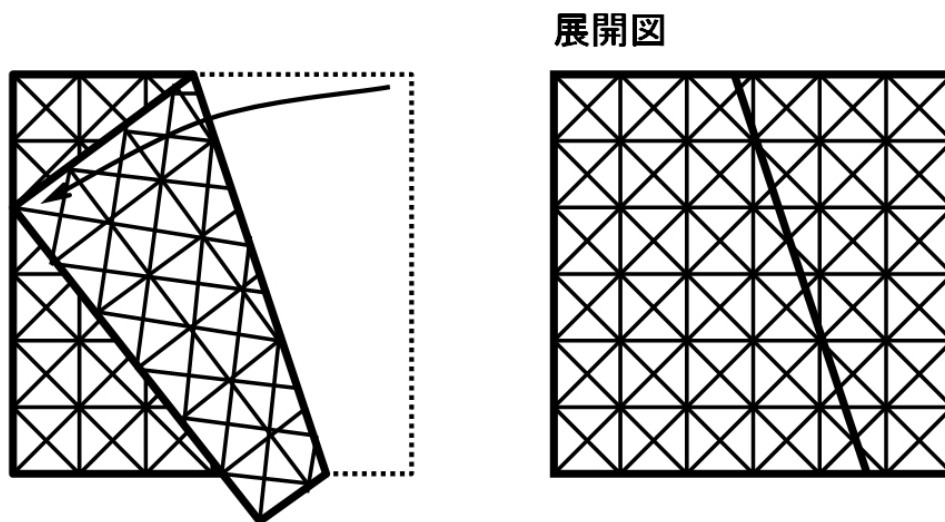


図 2.2: 折り目により新たにメッシュを分割している例

図 2.3 は、図 2.2 の折り目によって新たに分割された部分の拡大図であるが、新たに分割された部分はメッシュの大きさ、形状が不揃いである。

本研究では紙の力学的特性をメッシュ要素の節点の位置関係の変化により発生する力を用いて表現し、各節点に掛かる力を元に折り紙の形状を数値的に解析するという手法をとっている。一般に、このような手法をとる場合、著しく歪んだ三角形要素は解析解の精度悪化を招くため、メッシュを構成する三角形は可能な限り等辺に近いことが望ましい。しかし、図 2.2 の例で行っているように、予め分割してあるメッシュに対して折り目の部分の分割を追加するだけでは歪んだ三角形要素の発生を防ぐことができない。そこで、本研究では紙を折るごとにその時の面の形状に合わせたメッシュ分割を行うことで、歪みの少ない三角形メッシュの生成を行う。図 2.4 はその様子を示した例である。

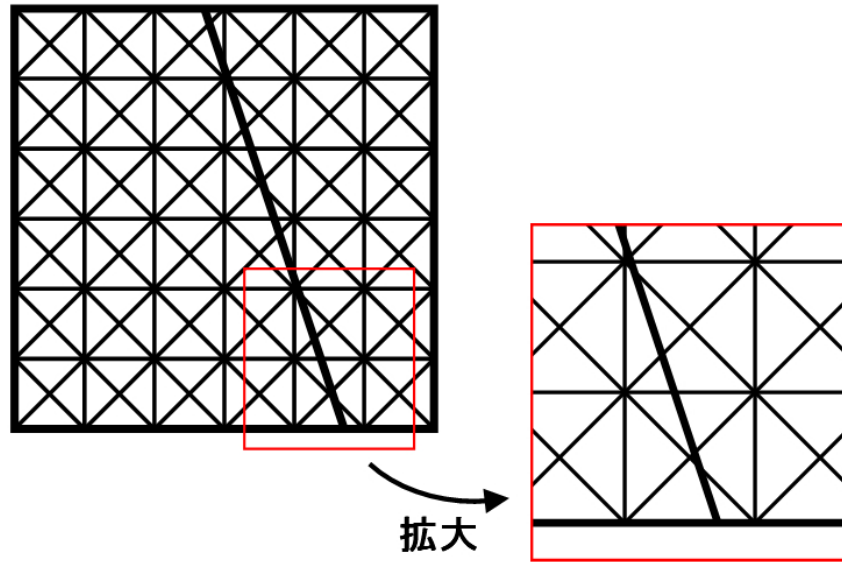


図 2.3: 折り目の部分の拡大図

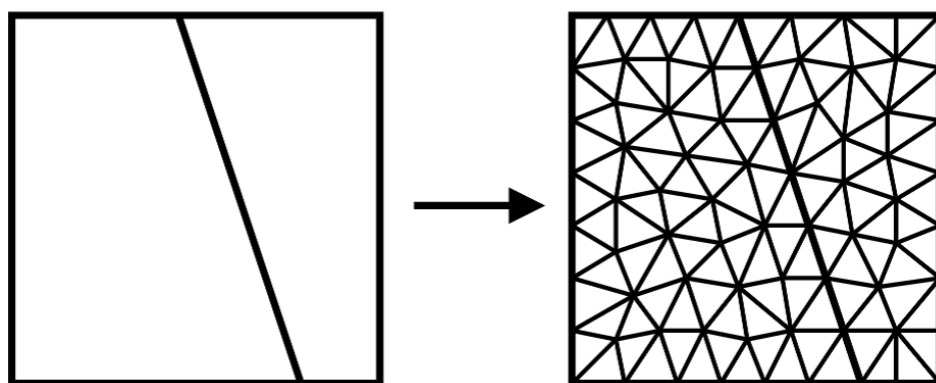


図 2.4: 面の形状に合わせたメッシュ分割の例

## 2.2 バブル・メッシュによる面の分割

### 2.2.1 バブル・メッシュの手順

面の形状に合わせて歪みの少ない三角形メッシュを自動的に生成する手法の一つにバブル・メッシュ [12][13] がある。ここではバブル・メッシュを用いた折り紙のメッシュモデル化の手法について説明する。バブル・メッシュにおける三角形分割手順は以下の通りである。

1. 全ての頂点にバブルを配置する。
2. 全ての辺上にバブルを配置する。
3. 全ての面内部にバブルを配置する。
4. Delaunay 法でバブル中心点を結んで、三角形メッシュを得る。

図 2.5 はこれらの手順の様子を示している。

### 2.2.2 バブルの配置

辺上に配置するバブルは、バブル間に隙間ができないように辺を覆える最少の個数のバブルを等間隔に配置する。辺の両端の頂点に配置したバブルによってすでに辺が覆われている場合にはバブルを配置しない。面内部のバブルの配置はバブル相互間の隙間、重なりが最小になるように最密充填する。そのための方法として、バブル・メッシュではバブル間の近接度にもとづくバブル間力を定義して動力学シミュレーションを行う。このバブル間力は両者が接しているときに最も安定な状態となり、この安定距離よりも両者が近づくと斥力が働き、遠ざかると引力が働くようにする。また、バブル間力は一定の距離以内にあるバブル間でのみ働くものとする。これらのバブル間の距離と力の関係を式 (2.1)、(2.2) のように定義する [12][13]。また、それをグラフ化したものが図 2.6 である。

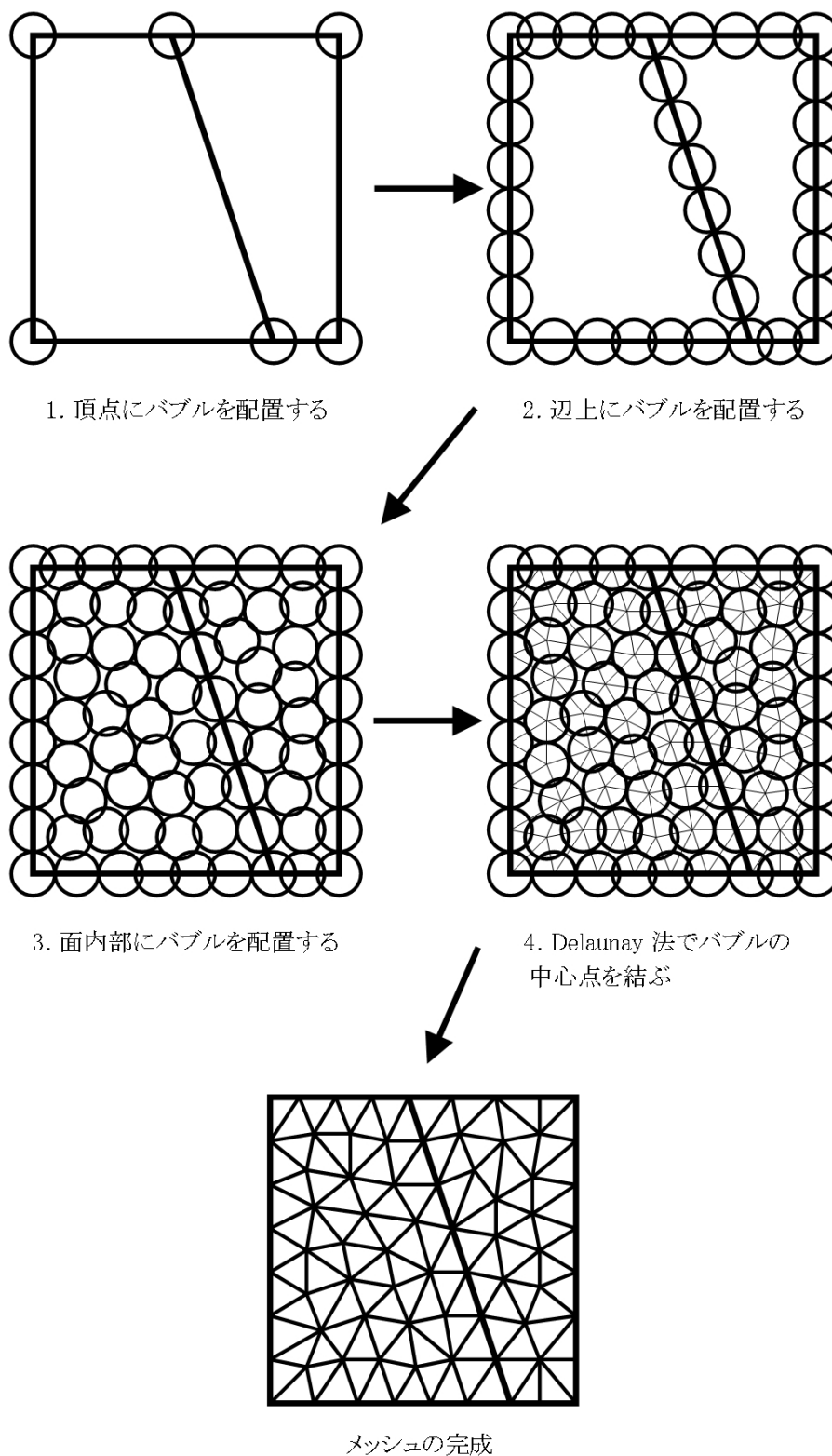


図 2.5: バブル・メッシュの手順

$$f(r) = \begin{cases} ar^3 + br^2 + cr + d & (0 \leq r < r_1) \\ 0 & (r_1 < r) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$f(r_0) = 0, f(r_1) = 0, f'(0) = 0, f'(r_1) = -k_0 \quad (2.2)$$

ここで  $r$  はバブル間の距離、 $f(r)$  は距離が  $r$  のときのバブル間力、 $r_0$  はバブルが接しているときの安定距離、 $r_1$  はバブル間力が働く最大の距離、 $k_0$  は安定距離におけるバブル間力を線形バネに置き換えたときの弾性係数である。また、 $a \sim d$  は式 (2.2) の条件を満たすように設定した定数である。

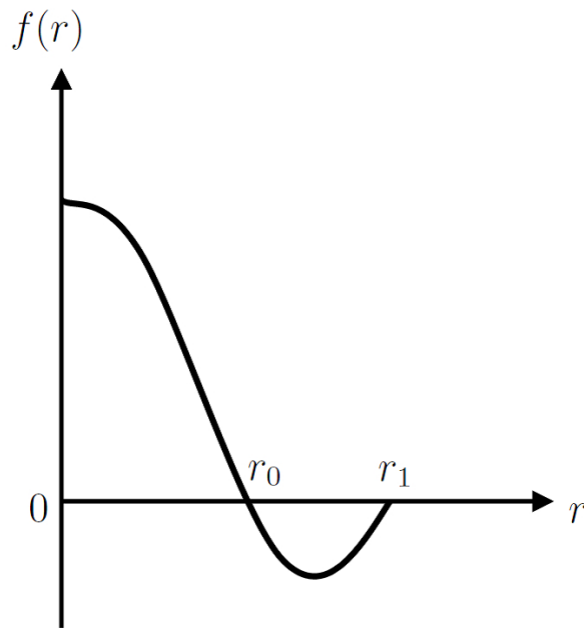


図 2.6: バブル間力

動力学シミュレーションを行う際には、このバブル間力の他にバブルの速度に比例する減衰力を設定して系全体の運動エネルギーを吸い取っていくことで系をひとつの安定状態にもっていく。その過程でバブルの密度が高すぎる箇所ではバブルの削除を行い、逆に低すぎる箇所にはバブルの追加を行う。その結果得られ

る適切な密度での安定状態をバブルが最密に充填された状態とし、面内部のバブルの配置とする。

力の平衡状態を求める動力学シミュレーションを行う際には、計算時間の短縮のために初期配置はなるべく求める安定解に近いほうがよい。正三角形格子の格子点上にバブルを配置したとき、各バブル間の距離が安定距離となり最も安定した状態となるので初期配置にはそれを利用する。図 2.7 は、正三角形格子を利用した初期配置の例である。正三角形格子の格子点上に配置したバブルと折り紙を重ねて、面の内部にあるバブルを動力学シミュレーションの初期配置として使用する。

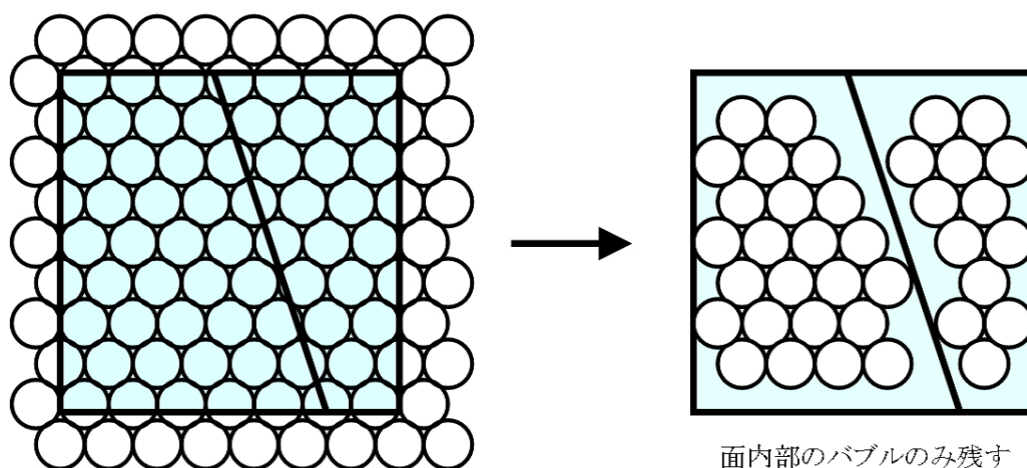


図 2.7: 面内部のバブルの初期配置

### 2.2.3 Delaunay 法による三角形分割

Delaunay 法 [14][15] とは、与えられた点を頂点とする三角形のうち、その三角形の外接円の中に頂点以外のどの点も含まないような三角形で分割する方法である。図 2.8 は Delaunay 法で行う外接円の中に他の点を含まない三角形による分割の様子、図 2.9 は外接円の中に他の点を含む三角形による分割の様子である。これらの比較でわかるように、Delaunay 法とは各三角形の最小角が最大になるような分割方法であり、より等辺に近く歪みの少ない三角形を生成することができる。

配置したバブルの中心点をこの Delaunay 法で結ぶことにより、歪みの少ない三角形メッシュを生成する。

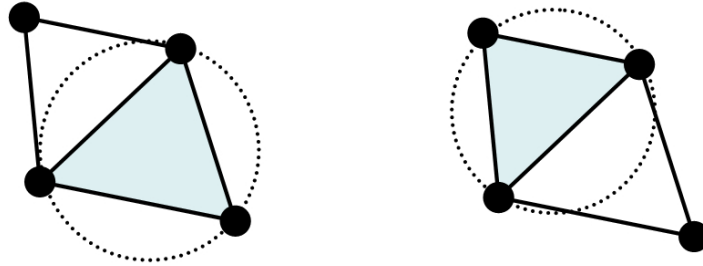


図 2.8: 外接円の中に他の点を含まない三角形による分割

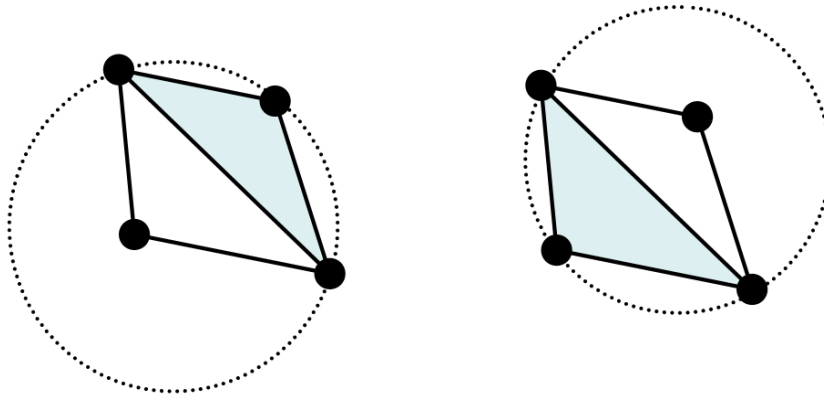


図 2.9: 外接円の中に他の点を含む三角形による分割

## 第 3 章

# 折り紙モデルの変形

### 3.1 変形の手法

本研究で用いる折り紙モデルの変形手法は、モデル化のときと同様にクロスシミュレーションを参考としたもので、外部から紙に加わる力と変形により紙の内部に発生する力をメッシュポリゴンの各頂点ごとに求め、それらの力の釣り合いから全体の形状を求める。

紙の安定状態は何も変形していない平面の状態であり、何らかの変形が起こると紙の内部には元の安定状態に戻ろうとするような変形に抵抗する力が発生する。本研究では、紙の力学的特性を表現するために伸縮、剪断、曲げの 3 つの変形に対して発生する力を考える。図 3.1 はその 3 つの変形の様子を示している。



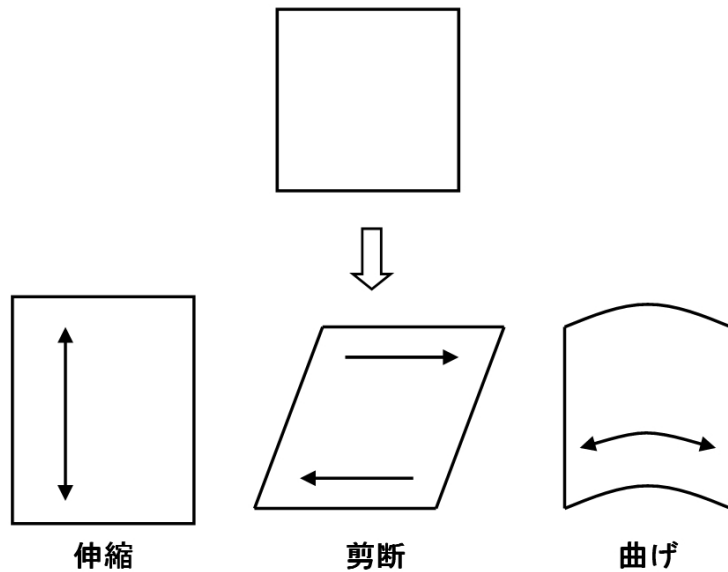


図 3.1: 紙の力学的特性を表現するために考慮する変形

### 3.2 伸縮に対して発生する力

伸縮の変形が起きた際にメッシュポリゴンの要素の中で特に変化が起こるのが辺の長さである。そこで伸縮に対して発生する力は各辺の長さの変化量によって算出する。変形後の辺の長さを  $l$ 、その辺の安定状態での長さを  $l_0$  とするとき、伸縮に対して発生する力の大きさ  $f_t$  を式 (3.1) のように表す。

$$f_t = k(l - l_0) \quad (3.1)$$

ここで  $k$  はこの力の大きさを決めるための定数である。紙は伸縮の変形に対する抵抗が強くそのような変形はほとんど起こらないため、 $k$  はかなり大きな値を設定する必要がある。

この伸縮に対して発生する力は、その辺の両端の頂点に対して働き、 $l$  が  $l_0$  より小さいときは 2 つの頂点が離れる方向に、 $l$  が  $l_0$  より大きいときは 2 つの頂点が近づく方向に働く。図 3.2 はその様子を示している。

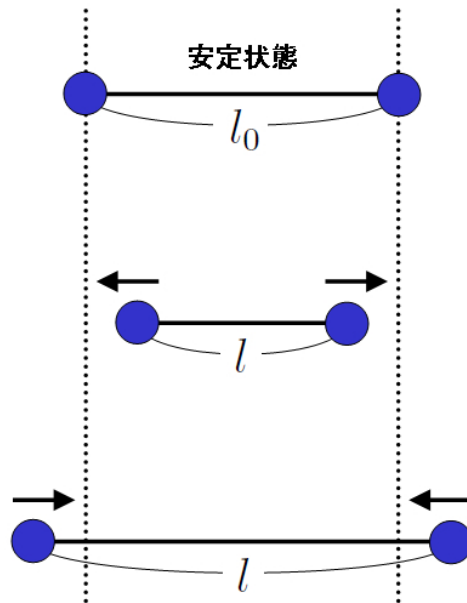


図 3.2: 伸縮に対して発生する力

### 3.3 剪断に対して発生する力

剪断の変形が起きた際にメッシュポリゴンの要素の中で特に変化が起こるのがメッシュ三角形の角の角度である。そこで剪断に対して発生する力は各メッシュ三角形の角の角度の変化量によって算出する。変形後のメッシュ三角形の角の角度を  $\theta$ 、その角の安定状態での角度を  $\theta_0$  とするとき、剪断に対して発生する力の大きさ  $f_h$  を式 (3.2) のように表す。

$$f_h = p(\theta - \theta_0) \quad (3.2)$$

ここで  $p$  はこの力の大きさを決めるための定数である。紙は剪断の変形に対する抵抗も強いいためそのような変形が起こらないように  $p$  の値を設定しなければならないが、伸縮に対して発生する力を大きく設定して辺の長さの変化を抑えたため、 $p$  の値があまり大きくななくても剪断の変形を抑えることができる。

この剪断に対して発生する力は、角を作っている 2 辺がお互いに共有していないほうの端の頂点に対してそれぞれの辺に垂直な方向に働き、 $\theta$  が  $\theta_0$  より大きいときは角の角度が小さくなる方向に、 $\theta$  が  $\theta_0$  より小さいときは角の角度が大きくなる方向に働く。図 3.3 はその様子を示している。

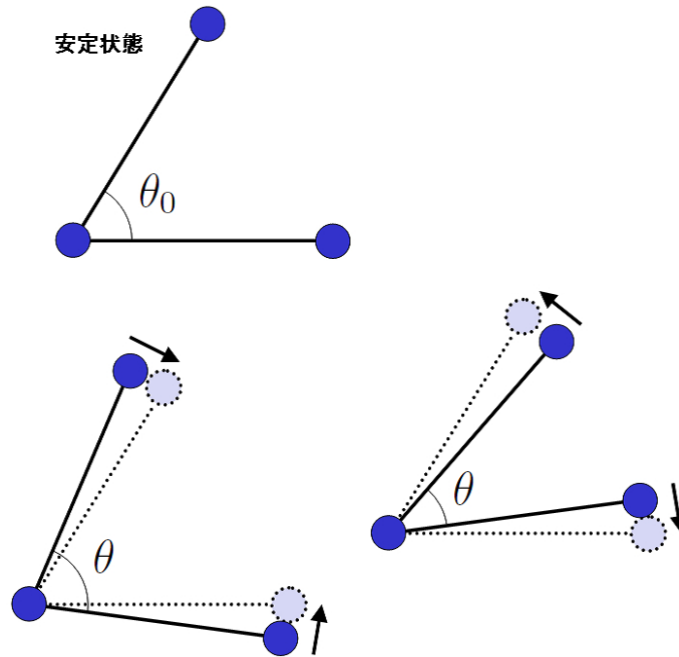


図 3.3: 剪断に対して発生する力

### 3.4 曲げに対して発生する力

曲げの変形が起きた際にメッシュポリゴンの要素の中で特に変化が起こるのが、辺を共有している隣接した 2 つの面の作る角度である。そこで曲げに対して発生する力はこの隣接する 2 つの面の作る角度の変化量によって算出する。変形後の隣接する面の作る角度を  $\phi$ 、その安定状態での角度を  $\phi_0$  とするとき、曲げに対して発生する力の大きさ  $f_b$  を式 (3.3) のように表す。

$$f_b = q(\phi - \phi_0) \quad (3.3)$$

ここで  $q$  はこの力の大きさを決めるための定数である。紙は曲げる変形に対しては許容的だが、平面の状態を保とうとする性質もある程度持っている。 $q$  には外部から力が加わったときには変形を許し、外部からの力が無くなったときには平面の状態に戻るような値を設定する。

この曲げに対して発生する力は、隣接する 2 面が共有している辺に向かい合う頂点に対してそれぞれの面に垂直な方向に働き、 $\phi$  が  $\phi_0$  より小さいときは 2 面の作る角度が大きくなる方向に、 $\phi$  が  $\phi_0$  より大きいときは 2 面の作る角度が小さくなる方向に働く。図 3.4 はその様子を示している。

例外として、折り目の部分では紙を平面の状態に保とうとする性質が無くなっていると考え、折り目の一部分の辺を共有する 2 面の間にはこの力が発生しないようにする。

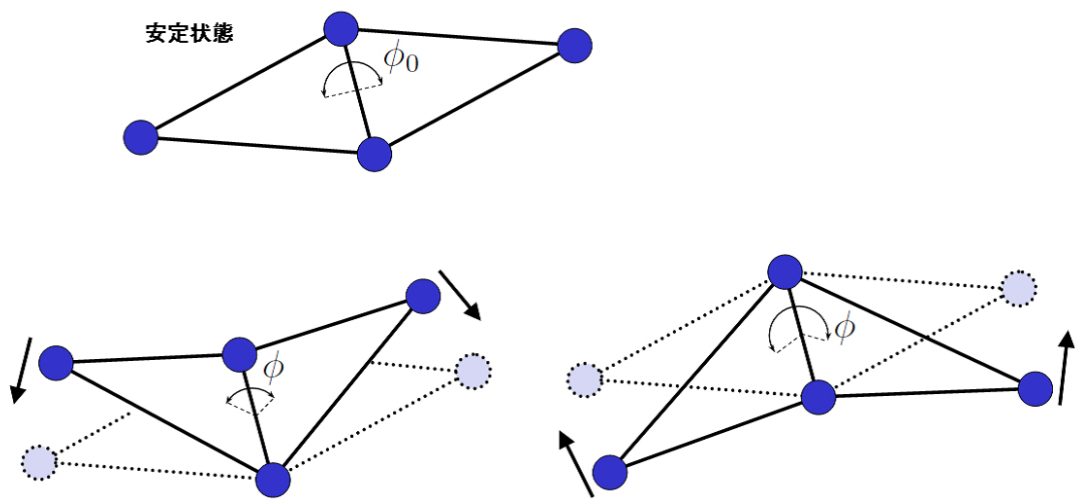


図 3.4: 曲げに対して発生する力

# 第 4 章

## 検証と考察

### 4.1 検証

本論文の第 2 章、第 3 章で述べた手法に沿ってプログラムを作成し、その実行結果を実際の紙の変形の様子と比較することで本研究の手法についての検証を行う。プログラムの作成には 3D グラフィクスツールキット「FK Toolkit System」[16] を用いた。また、今回の実装ではバブル・メッシュにおいてバブルの最密充填を行う際と、折り紙の形状を求める際の動力学シミュレーションでは、4 次の Runge-Kutta 法 [17][18] を用いた。

#### 4.1.1 折り目のついていない状態の紙の変形

図 4.1 は折り目のついていない折り紙を、頂点 a が頂点 c に重なるように曲げた様子を表したプログラムの実行画面である。ここでは頂点 c の位置を固定して頂点 a を移動させており、第 3 章で述べた変形の手法においてこの 2 つの頂点の位置を指定することで折り紙全体の形状の変形を行っている。図 4.2 は折り目のついていない実際の紙を曲げる様子である。図 4.1 と図 4.2 の比較により、本研究の手法により折り目のついていない状態の紙の変形を再現できることが確認できた。

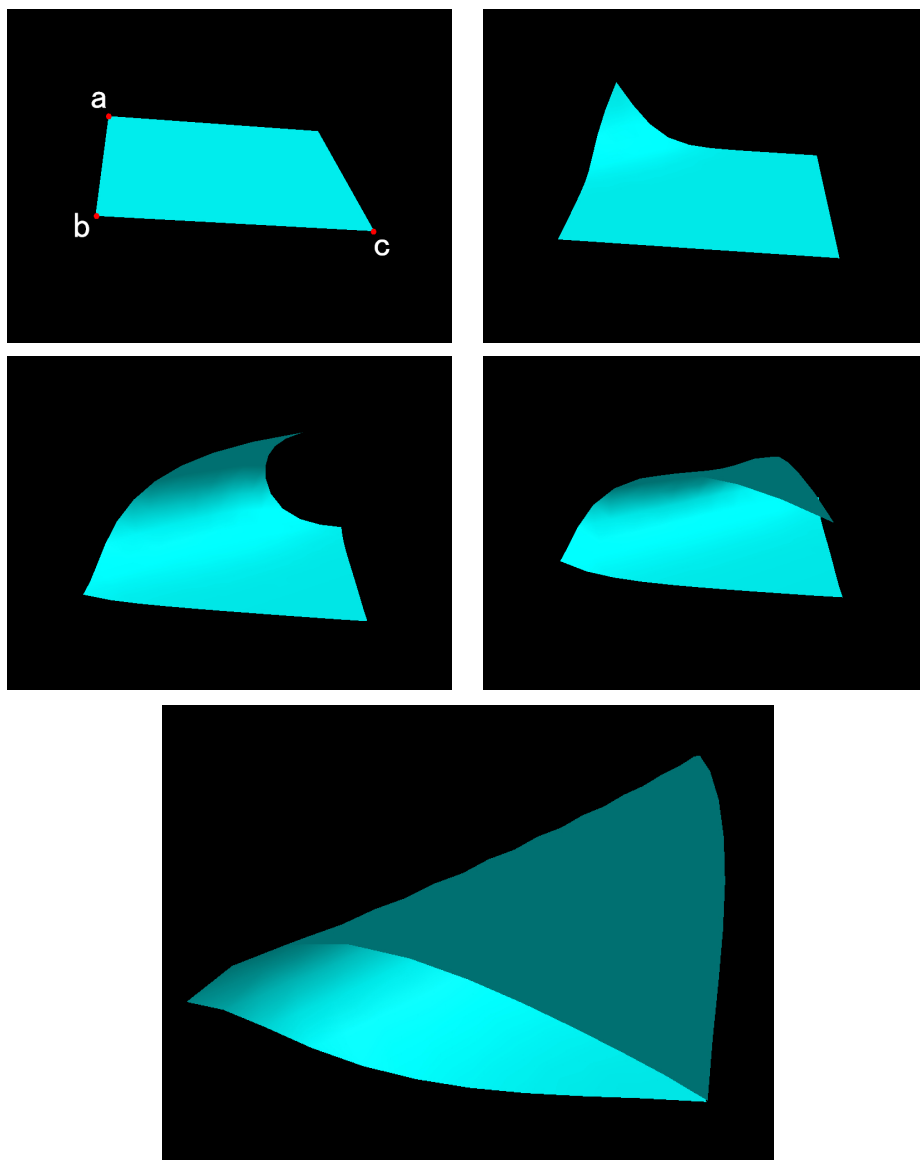


図 4.1: プログラムで折り目のついていない紙を曲げる様子

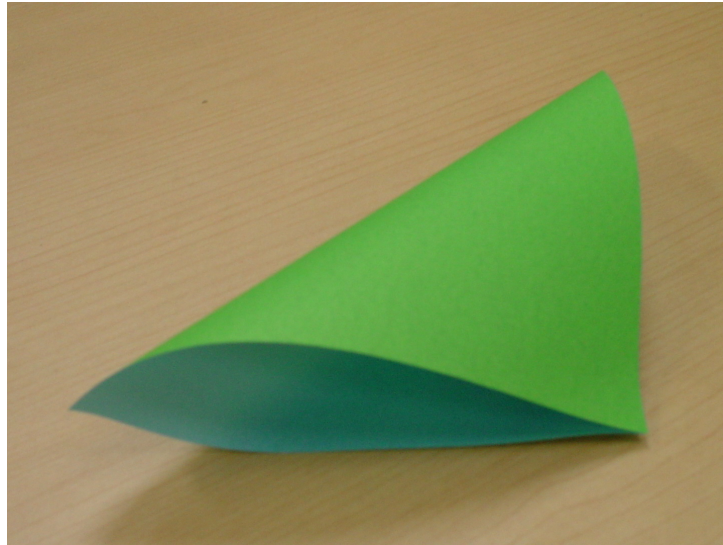


図 4.2: 折り目のついていない実際の紙を曲げる様子

#### 4.1.2 折り目のついている状態の紙の変形

図 4.3 は対角線  $bd$  に折り目のついた折り紙を、頂点  $a$  が頂点  $c$  に重なるように曲げた様子を表したプログラムの実行画面である。ここでは 4.1.1 節の変形と同様に、頂点  $c$  の位置を固定して頂点  $a$  を移動させており、第 3 章で述べた変形の手法においてこの 2 つの頂点の位置を指定することで折り紙全体の形状の変形を行っている。折り目のついている紙を曲げる変形では、折り目の部分から紙が折れ曲がっていく様子を確認することができた。図 4.4 は折り目のついている実際の紙を曲げる様子である。図 4.3 と図 4.4 の比較により、本研究の手法により折り目のついている状態の紙の変形を再現できることが確認できた。



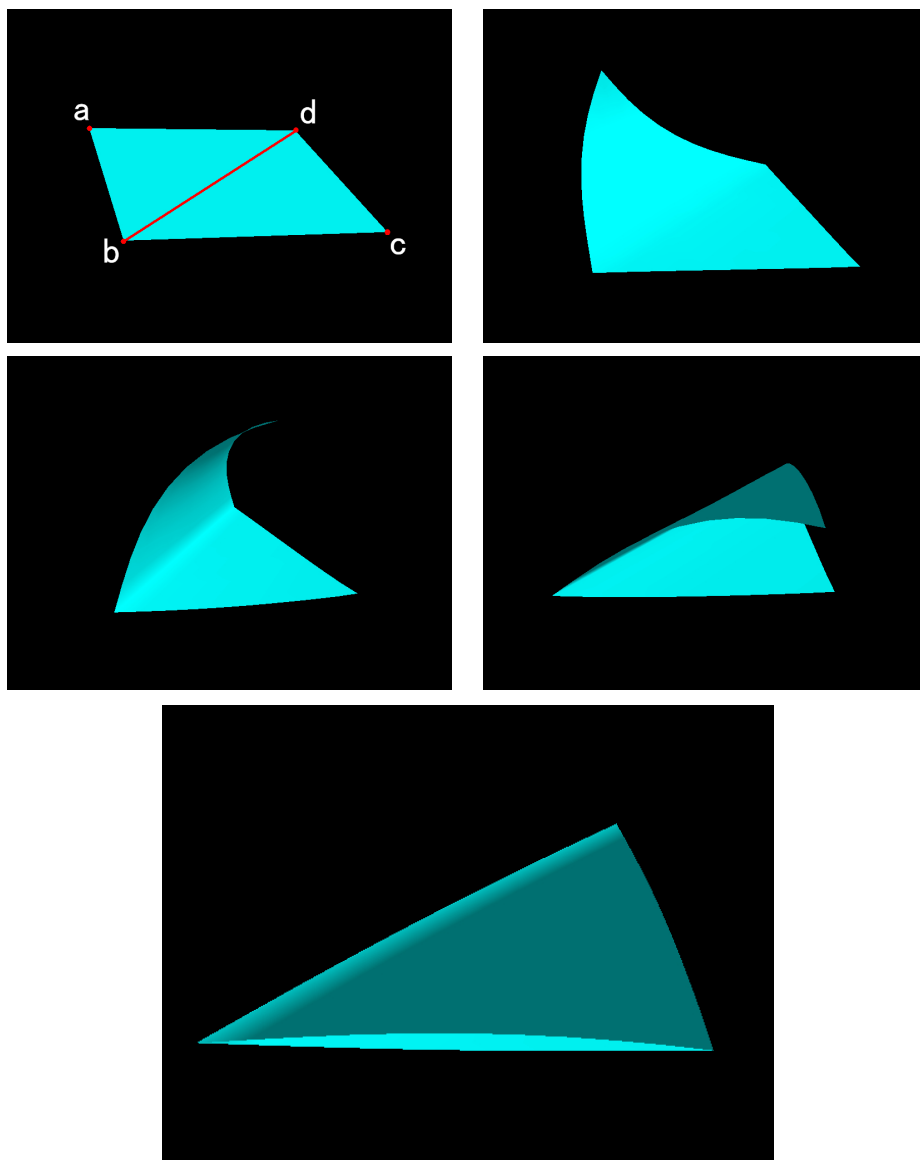


図 4.3: プログラムで折り目のついている紙を曲げる様子

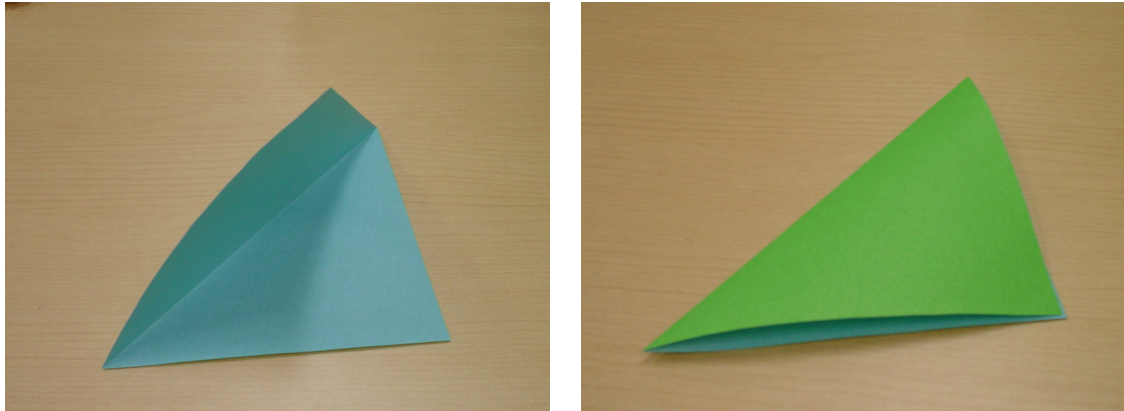


図 4.4: 折り目のついていない実際の紙を曲げる様子

### 4.1.3 折り重なっている状態の紙の変形

図 4.5 は面  $ade$  を線分  $de$  を折り目として  $180^\circ$  折り返した後、頂点  $b$  が頂点  $c$  に重なるように曲げていく様子を表したプログラムの実行画面である。ここでは頂点  $c$  の位置を固定して頂点  $b$  を移動させており、第 3 章で述べた変形の手法においてこの 2 つの頂点の位置を指定することで折り紙全体の形状の変形を行っている。この変形では最初は面が緩やかなカーブを描いて曲がっていったのだが、ある時点を境に一か所から急激に折れ曲がり出し、最終的にはシミュレーションが破綻してしまった。本研究の手法では折り重なっている状態の紙の変形を再現することはできなかった。

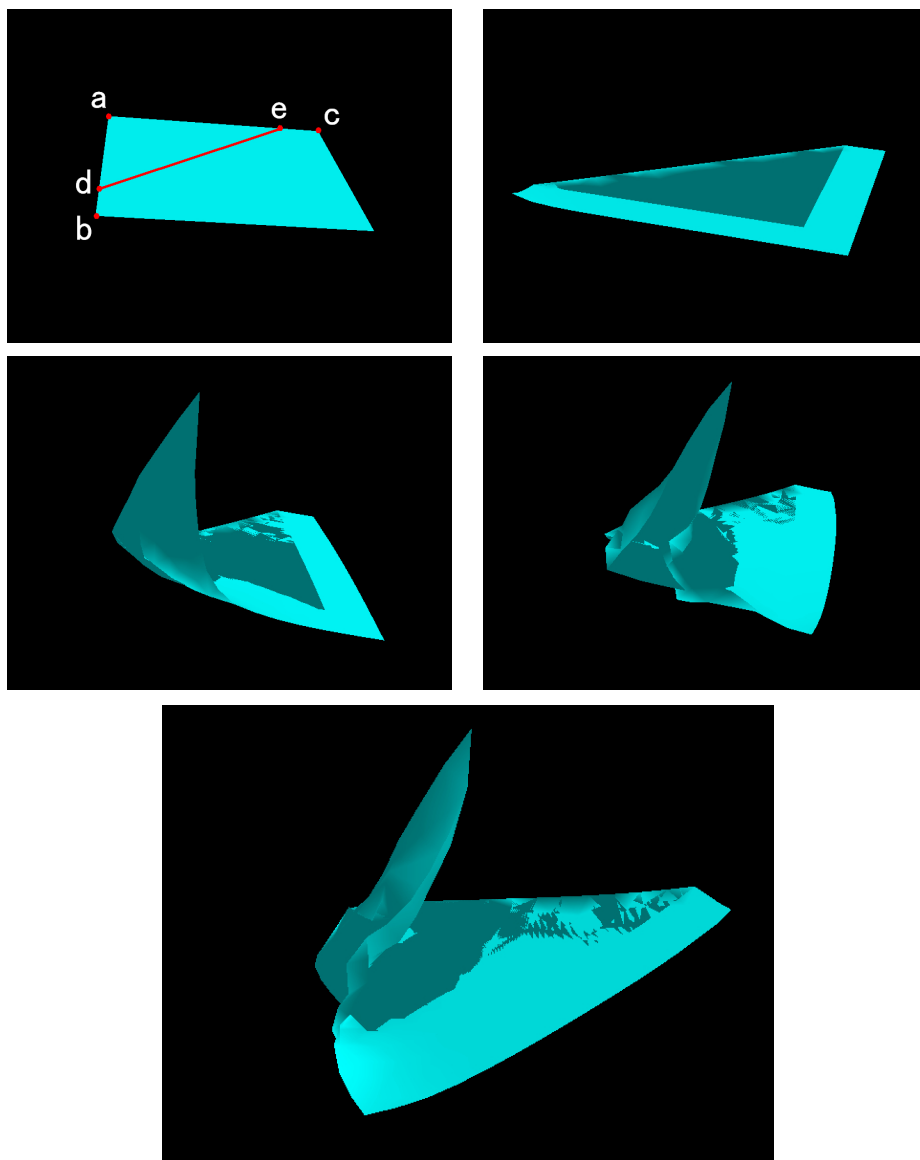


図 4.5: プログラムで折り重なっている状態の紙を曲げる様子

## 4.2 考察

4.1.1 節と 4.1.2 節で行った検証では、折り紙モデルに対し折り目を設定したこと以外は全く同じ操作を行い、折り目のある状態、ない状態それぞれの変形の様子を再現することができた。この結果から、折り重なっていない状態の紙においては、本研究で提案するメッシュの分割手法、紙の力学的特性の設定とそれを用いた動力学シミュレーションの手法が折り紙シミュレーションでの曲面表現に有効であることが確認できた。

折り重なっている状態の紙の変形において面が曲がっていく様子を再現できなかったのは、重なった 2 つの面のメッシュ構造が異なっていたため、重なった面を繋いでいる辺上のメッシュの頂点にそれぞれの面から別々の力が加わり、お互いの面の動きを制限してしまったためと考えられる。

## 第 5 章

### まとめ

本研究では、折り紙を小さな三角形に分割したポリゴンメッシュとしてモデル化し曲面を表現した。折る操作を行うたびに起こるメッシュの再分割にバブル・メッシュを使用することで、辺の長さが極端に違う歪んだ三角形要素の発生を防ぐことができた。折り紙の形状を決定するための動力学シミュレーションにおいて、伸縮、剪断の変形に強く、曲げの変形に弱い紙の力学的特性を適切に設定することで、折り重なっていない状態の紙については実際の紙のように曲がる様子を再現することができた。

本手法は、現状では折り重なっている状態の紙を曲げる変形を再現できないという問題があるが、この問題を解決することにより折り紙シミュレーションにおいて曲面の表現を行うための手法の一つとなるだろう。

# 謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導頂きました本校メディア学部の渡辺大地講師をはじめ、ゲームサイエンスプロジェクトのスタッフの皆様、日頃から研究のサポートをしていただいた研究室のメンバーに心より御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] Urban Demographics, OPERATION PEACE CRANE,  
<[http://www.e22.com/peacecrane/origami\\_j.htm](http://www.e22.com/peacecrane/origami_j.htm)>.
- [2] 日本折紙協会, 日本折紙協会・公式ホームページ,  
<[http://www.origami-noa.com/knowledge/abc\\_q1.htm](http://www.origami-noa.com/knowledge/abc_q1.htm)>.
- [3] Shinya Miyazaki, Takami Yasuda, Shigeki Yokoi and Jun-ichiro Toriwaki, “An ORIGAMI Playing Simulator in the Virtual Space”, The Journal of Visualization and Computer Animation, Vol. 7, No. 1, pp. 25-42, 1996.
- [4] 古田陽介, 三谷純, 福井幸男, “マウス入力による対話的操作を組み込んだ仮想折り紙システム”, 情報処理学会研究報告, Vol. 2006, No. 76, 2006-CG-123, pp. 13-18, 2006.
- [5] 横山卓弘, 高井昌彰, “厚さを持った折り紙シミュレーションとその評価”, 情報処理学会研究報告, Vol. 2000, No. 115, 2000-CG-101, pp. 19-24, 2000.
- [6] 三谷純, 鈴木宏正, “折り紙の構造把握のための形状構築と CG 表示”, 情報処理学会論文誌, Vol. 46, No. 1, pp. 247-254, 2005.
- [7] 宮崎慎也, 折り紙シミュレーション,  
<<http://www.om.sist.chukyo-u.ac.jp/main/research/origami/>>.

- [8] David Baraff and Andrew Witkin, “Large Steps in Cloth Simulation”, In Proceedings of ACM SIGGRAPH '98, pp. 43-54, 1998.
- [9] Robert Bridson, Ronald Fedkiw and John Anderson, “Robust Treatment of Collisions, Contact and Friction for Cloth Animation”, In Proceedings of ACM SIGGRAPH 2002, pp. 594-603, 2002.
- [10] Kwang-Jin Choi and Hyeong-Seok Ko, “Stable but Responsive Cloth”, In Proceedings of ACM SIGGRAPH 2002, pp. 604-611, 2002.
- [11] David Baraff, Andrew Witkin and Michael Kass “Untangling Cloth” In Proceedings of ACM SIGGRAPH 2003, pp. 862-870, 2003.
- [12] 嶋田憲司, “物理モデルによる自動メッシュ分割”, 日本シミュレーション学会誌「シミュレーション」, Vol. 12, No. 1, pp. 11-20, 1993.
- [13] 嶋田憲司, “球の最密充填と Delaunay 網による曲面の自動三角形メッシュ分割”, 情報処理学会研究報告, Vol. 1994, No. 17, 1993-CG-67, pp. 1-8, 1994.
- [14] M. ドバーク, M. ファン・クリベルド, M. オーバマーズ, O. シュワルツコップ, 「コンピュータ・ジオメトリ 計算幾何学：アルゴリズムと応用」, 近代科学社, 2000.
- [15] 杉原厚吉, 「グラフィックスの数理」, 共立出版株式会社, 1995.
- [16] 渡辺大地, FK Toolkit System, <<http://www.teu.ac.jp/aqua/~earth/FK/>>.
- [17] 皆本晃弥, 「C 言語による数値計算入門 解法・アルゴリズム・プログラム」, サイエンス社, 2005.
- [18] 戸川隼人, 「UNIX ワークステーションによる科学技術計算ハンドブック」, サイエンス社, 1992.